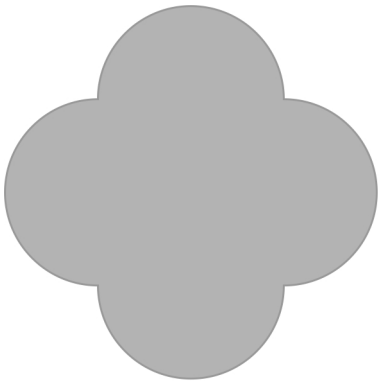
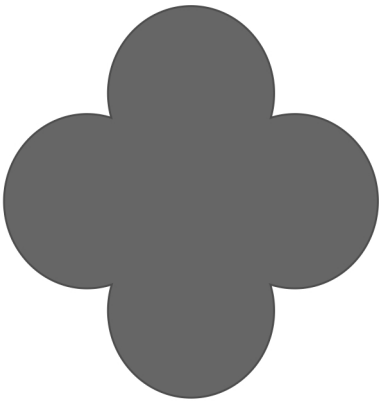
## MATEMÁTICA

**1**

**Um *quatrefoil* é uma figura simétrica comumente usada em arte, *design* e arquitetura. Sua forma é antiga e o nome vem do latim, significando "quatro folhas". Ele possui quatro folhas de mesmo tamanho, com formato circular, interconectadas, as quais se sobrepõem ligeiramente, e se assemelha a uma flor de quatro pétalas. Considere dois exemplos de *quatrefoil*, a seguir.**



Exemplo A



Exemplo B

**Pretende-se construir um *quatrefoil* similar ao apresentado no Exemplo A, no qual as folhas são formadas por semicírculos.**
**Sabendo que seu perímetro deve ser de 28$\pi$ cm, determine a área total da figura a ser construída. Apresente os cálculos realizados na resolução da questão.**

**QUESTÃO 1 – EXPECTATIVA DE RESPOSTA**

**Conteúdo programático:** Figuras Geométricas. Área.

**Resposta esperada:**

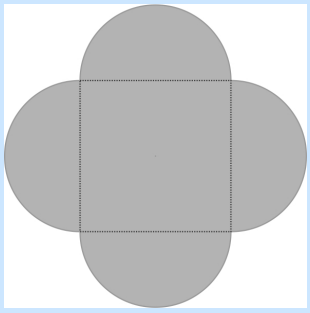
Como as folhas são formadas por semicírculos, o perímetro total é equivalente ao comprimento de duas circunferências de mesmo raio. Dado que o comprimento de uma circunferência de raio $r$ é $2\pi r$ , temos que:

$$2 \cdot 2\pi r = 28\pi.$$
$$4\pi r = 28\pi$$
$$r = 7$$

Portanto, o raio é de 7 centímetros.
A área ocupada pelas quatro folhas é equivalente à área de dois círculos de raio 7 cm, portanto:

$$A = 2 \cdot \pi r^2 = 2 \cdot \pi \cdot 7^2 = 98\pi \text{ cm}^2.$$

A área do restante da figura é equivalente à área de um quadrado cuja medida do lado é exatamente a do diâmetro de um círculo de raio 7 cm, ou seja, de um quadrado cuja medida do lado é 14 cm.



Portanto, a área do restante da figura é de 196 cm$^2$.
Logo, a área do *quatrefoil* é de $A = (196 + 98\pi)$cm$^2$.

**2**

**Considere as seguintes informações:**

- **Em um instituto de pesquisa trabalham 30 profissionais.**
- **Cada profissional tem apenas uma formação, ou em Biologia ou em Matemática.**
- **Parte do total destes profissionais fala inglês fluentemente.**
- **A quantidade de matemáticos fluentes em inglês é o dobro da quantidade de biólogos fluentes em inglês e representa 40% do total de profissionais.**
- **A quantidade de biólogos e matemáticos não fluentes em inglês é exatamente igual.**

**Na oportunidade de ser sorteado um profissional para representar o instituto de pesquisa em um evento, analise as sentenças a seguir e argumente sobre sua veracidade ou não.**

**I) A probabilidade de ser sorteado um profissional fluente em inglês é maior do que a probabilidade de ser sorteado um matemático.**

**II) A probabilidade de ser sorteado um profissional não fluente em inglês é igual à probabilidade de ser sorteado um biólogo.**

**Apresente os cálculos realizados na resolução da questão.**

**QUESTÃO 2 – EXPECTATIVA DE RESPOSTA**

**Conteúdo programático:** Equações. Porcentagem. Probabilidade.

**Resposta esperada:**

- Quantidade de profissionais do instituto: 30.
- Quantidade de biólogos fluentes em inglês: $x$
- Quantidade de matemáticos fluentes em inglês: $2x = \frac{40}{100} \cdot 30 = 12$.

  Assim, $2x = 12 \Rightarrow x = 6$, logo a quantidade de biólogos fluentes em inglês é 6.
- Quantidade de biólogos não fluentes em inglês: $y$
- Quantidade de matemáticos não fluentes em inglês: $y$

Disto segue que $6 + 12 + 2y = 30 \Rightarrow y = 6$.
Assim:

- Quantidade de biólogos fluentes em inglês: 6
- Quantidade de matemáticos fluentes em inglês: 12
- Quantidade de biólogos não fluentes em inglês: 6
- Quantidade de matemáticos não fluentes em inglês: 6

Destes resultados obtêm-se as seguintes probabilidades:
A probabilidade $P_1$ de ser sorteado um profissional fluente em inglês: $\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$

A probabilidade $P_2$ de ser sorteado um matemático: $\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$

A probabilidade $P_3$ de ser sorteado um profissional não fluente em inglês: $\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

A probabilidade $P_4$ de ser sorteado um biólogo: $\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

Desta forma, a sentença I é falsa, pois $P_1 = P_2$. Já a sentença II é verdadeira, pois $P_3 = P_4$ .

**Resposta alternativa:**

- Quantidade de matemáticos fluentes em inglês: $\frac{40}{100} \cdot 30 = 12$
- Quantidade de biólogos fluentes em inglês: 6 (metade da quantidade de matemáticos fluentes em inglês)
- Quantidade de biólogos e matemáticos não fluentes em inglês: $30 - 12 - 6 = 12$

Como a quantidade de biólogos não fluentes em inglês é igual à quantidade de matemáticos não fluentes em inglês: $12 \div 2 = 6$

- Quantidade de biólogos não fluentes em inglês: 6
- Quantidade de matemáticos não fluentes em inglês: 6

Destes resultados obtêm-se as seguintes probabilidades:
A probabilidade $P_1$ de ser sorteado um profissional fluente em inglês: $\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$

A probabilidade $P_2$ de ser sorteado um matemático: $\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$

A probabilidade $P_3$ de ser sorteado um profissional não fluente em inglês: $\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

A probabilidade $P_4$ de ser sorteado um biólogo: $\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

Desta forma, a sentença I é falsa, pois $P_1 = P_2$. Já a sentença II é verdadeira, pois $P_3 = P_4$ .

**3**

**Uma mãe, com o intuito de organizar os brinquedos dos seus filhos, teve a ideia de colocá-los em caixas coloridas. Ela classificou os brinquedos em três categorias, de acordo com seus tamanhos, sendo elas: brinquedos pequenos, médios e grandes. Para a organização, a mãe utilizou caixas de acrílico amarelas, verdes e azuis, as quais comportam as seguintes quantidades de brinquedos:**

- **Caixas Amarelas: 2 grandes, 8 médios e 10 pequenos.**
- **Caixas Verdes: 2 grandes, 20 médios e 16 pequenos.**
- **Caixas Azuis: 1 grande, 10 médios e 14 pequenos.**

**Considere que as crianças possuem 12 brinquedos grandes, 72 brinquedos de tamanho médio e 84 pequenos e que foi colocada, em cada caixa, exatamente a quantidade de brinquedos de cada categoria que ela comporta. Quantas caixas de cada cor esta mãe utilizou para acomodar todos os brinquedos de seus filhos?**

**Apresente os cálculos realizados na resolução da questão.**

**QUESTÃO 3 – EXPECTATIVA DE RESPOSTA**

**Conteúdo programático:** Sistemas de equações lineares.

**Resposta esperada:**

Sejam $x$, $y$ e $z$ a quantidade de caixas amarelas, verdes e azuis, respectivamente. De acordo com o enunciado da questão, precisamos obter os valores de $x$, $y$, e $z$ que satisfazem o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 12 \\ 8x + 20y + 10z = 72 \\ 10x + 16y + 14z = 84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z = 12 & \text{(I)} \\ 4x + 10y + 5z = 36 & \text{(II)} \\ 5x + 8y + 7z = 42 & \text{(III)} \end{cases}$$

Da equação (I), obtemos:
$z = 12 - 2x - 2y$ (IV)

Substituindo (IV) em (II):
$4x + 10y + 5(12 - 2x - 2y) = 36 \Rightarrow 4x + 10y + 60 - 10x - 10y = 36 \Rightarrow -6x = -24 \Rightarrow x = 4$

Substituindo $x = 4$ em (IV):
$z = 12 - 2 \cdot 4 - 2y \Rightarrow z = 4 - 2y$ (V)

Substituindo $x = 4$ e (V) na equação III:
$5 \cdot 4 + 8y + 7(4 - 2y) = 42 \Rightarrow 20 + 8y + 28 - 14y = 42 \Rightarrow -6y = -6 \Rightarrow y = 1$

Substituindo $y = 1$ em (V):
$z = 4 - 2 \cdot 1 = 2$

**Portanto, a mãe comprou 4 caixas amarelas, 1 verde e 2 azuis.**

**Resposta alternativa:**
Sejam $x$, $y$ e $z$ a quantidade de caixas amarelas, verdes e azuis, respectivamente. Por tentativa, temos:

| Quantidade de caixas de cada cor | Quantidade total de brinquedos grandes $2x + 2y + z$ | Quantidade total de brinquedos médios $8x + 20y + 10z$ | Quantidade total de brinquedos pequenos $10x + 16y + 14z$ | |
|---|---|---|---|---|
| $x = y = z = 1$ | $2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 = 5$ | $8 \cdot 1 + 20 \cdot 1 + 10 \cdot 1 = 38$ | $10 \cdot 1 + 16 \cdot 1 + 14 \cdot 1 = 40$ | Não satisfaz o enunciado |
| $x = y = z = 2$ | $2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 = 10$ | $8 \cdot 2 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 2 = 76$ | $10 \cdot 2 + 16 \cdot 2 + 14 \cdot 2 = 80$ | Não satisfaz o enunciado |
| $x = 3; y = z = 2$ | $2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 = 12$ | $8 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 2 = 84$ | $10 \cdot 3 + 16 \cdot 2 + 14 \cdot 2 = 90$ | Não satisfaz o enunciado |
| $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | |
| $x = 4; y = 1; z = 2$ | $2 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 2 = 12$ | $8 \cdot 4 + 20 \cdot 1 + 10 \cdot 2 = 72$ | $10 \cdot 4 + 16 \cdot 1 + 14 \cdot 2 = 84$ | Satisfaz o enunciado |

**Portanto, a mãe comprou 4 caixas amarelas, 1 verde e 2 azuis.**

**4**

**Uma empresa de produtos alimentícios recebeu de seu contador uma planilha com os lucros mensais referentes ao ano de 2017. Ao analisar a planilha, a empresa constatou que, no mês 4 (abril), teve R$ 50.000,00 de lucro e que, no mês 6 (junho), o lucro foi de R$ 30.000,00.**
**Determine o lucro da empresa, em dezembro de 2017, sabendo que a função que descreve o lucro *L* no mês *t* daquele ano é definida por**

$$L(t) = a \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}t\right) + b \quad \text{em que} \quad 1 \leq t \leq 12, \quad a > 0 \quad \text{e} \quad b > 0.$$

**Apresente os cálculos realizados na resolução da questão.**

**QUESTÃO 4 – EXPECTATIVA DE RESPOSTA**

**Conteúdo programático:** Trigonometria. Funções Trigonométricas.

**Resposta esperada:**

Pelas informações apresentadas no enunciado, temos que $L(4) = 50.000$ e $L(6) = 30.000$.
Substituindo na expressão $L(t) = a \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}t\right) + b$, segue que

$$L(4) = a \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \cdot 4\right) + b \Rightarrow a \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) + b = 50.000$$

$$L(6) = a \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \cdot 6\right) + b \Rightarrow a \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} + 3\pi\right) + b = 30.000$$

Utilizando a relação $cos(x + y) = cos(x) \cdot cos(y) - sen(x) \cdot sen(y)$ e substituindo os valores de seno e cosseno adequadamente, temos:

$$\frac{a}{2} + b = 50.000$$

$$-\frac{a}{2} + b = 30.000$$

Adicionando membro a membro as equações, segue que $2b = 80.000$ e, portanto, $b = 40.000$.
Substituindo esse valor em $\frac{a}{2} + b = 50.000$ e resolvendo a equação, temos que $a = 20.000$.

Assim, $L(t) = 20.000 \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}t\right) + 40.000$.

Portanto, o lucro em dezembro, mês 12, é dado por:

$L(12) = 20.000 \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \cdot 12\right) + 40.000 = 20.000 \cdot \frac{1}{2} + 40.000 = 50.000.$

**O lucro da empresa em dezembro foi de R$ 50.000,00.**

**Resposta alternativa:**
Pelas informações apresentadas no enunciado, temos que $L(4) = 50.000$ e $L(6) = 30.000$.
Substituindo na expressão $L(t) = a \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}t\right) + b$, segue que

$$L(4) = a \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \cdot 4\right) + b \Rightarrow a \cdot cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + b = 50.000$$

$$L(6) = a \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \cdot 6\right) + b \Rightarrow a \cdot cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) + b = 30.000$$

Como $cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ e $cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, temos:

$$\frac{a}{2} + b = 50.000 \quad (I)$$

$$-\frac{a}{2} + b = 30.000 \quad (II)$$

Subtraindo (II) de (I), segue que $a = 20.000$.
Substituindo esse valor em $\frac{a}{2} + b = 50.000$, temos que $b = 40.000$.
Assim, $L(t) = 20.000 \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}t\right) + 40.000$.
Portanto, o lucro em dezembro, mês 12, é dado por:
$L(12) = 20.000 \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \cdot 12\right) + 40.000 = 20.000 \cdot \frac{1}{2} + 40.000 = 50.000$.

**O lucro da empresa em dezembro foi de R$ 50.000,00.**