MATEMÁTICA

1

Um estandarte é um tipo de bandeira que pode representar um país, uma instituição civil ou religiosa, um clube de futebol, uma escola de samba. Uma artesã fez um estandarte e o enfeitou, em sua parte inferior, com pedaços de fita de tamanhos diferentes. Sabendo que o menor pedaço de fita mede 8 cm e que o comprimento dos pedaços de fita aumenta de 2,5 em 2,5 centímetros, responda aos itens a seguir, desconsiderando possíveis perdas.

a) Considerando que o maior pedaço de fita mede 125,5 cm, quantos pedaços de fita foram utilizados para confeccionar o estandarte?
Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

b) Supondo que a artesã tenha utilizado 60 pedaços de fita, qual será o comprimento total dos pedaços de fita utilizados?
Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

QUESTÃO 1 – EXPECTATIVA DE RESPOSTA

Conteúdo programático: Progressão Aritmética.

Resposta esperada:

a) Este é um item que aborda um problema de progressão aritmética em que são dados o primeiro termo, $a_1 = 8$, o valor do n-ésimo termo, $a_n = 125,5$, e a razão $r = 2,5$.
Pela fórmula $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$, calcula-se a quantidade n de termos, isto é,

$$125,5 = 8 + (n-1)\cdot 2,5$$
$$125,5 = 8 + 2,5n - 2,5$$
$$2,5n = 125,5 - 8 + 2,5$$
$$2,5n = 120$$
$$n = \frac{120}{2,5}$$
$$n = 48$$

Portanto, foram utilizados 48 pedaços de fita.

Resolução alternativa:

Subtraindo a medida do último pedaço de fita da medida do primeiro pedaço de fita, tem-se $125,5 - 8 = 117,5$ cm. Como as medidas dos pedaços de fita se diferenciam por $2,5$ cm, tem-se $117,5 \div 2,5 = 47$ pedaços de fita que somados com o primeiro pedaço de fita resulta em $47 + 1 = 48$. Portanto, foram utilizados 48 pedaços de fita.

b) Este é um item que aborda a soma dos 60 termos de uma progressão aritmética em que são dados o primeiro termo, $a_1 = 8$, e a razão $r = 2,5$. Pela fórmula $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$, calcula-se o termo a_{60}, isto é,

$$a_{60} = 8 + (60-1)\cdot 2,5$$
$$a_{60} = 8 + 59 \times 2,5$$
$$a_{60} = 155,5$$

A fórmula de soma dos n termos de uma progressão aritmética é dada por $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\times n}{2}$, em que n é a quantidade de termos. Desse modo,

$$S_{60} = \frac{(8 + 155,5)\times 60}{2}$$
$$S_{60} = 163,5 \times 30$$
$$S_{60} = 4905$$

Portanto, o comprimento total dos pedaços de fita utilizados é de 4905 cm ou 49,05 m.

Resolução alternativa:

Sabendo que o $48^{\underline{o}}$ pedaço de fita mede $125,5$ cm, logo o $60^{\underline{o}}$ pedaço de fita mede $125,5 + 12 \times 2,5 = 155,5$.
Considerando que a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos

$(8 + 155,5 = 163,5)$ e que são 60 pedaços de fita, então essa soma repete-se 30 vezes.
Assim, $163,5 \times 30 = 4905$ corresponde à soma dos 60 pedaços de fita.
Portanto, o comprimento total dos pedaços de fita utilizados é de 4905 cm ou 49,05 m.

2

A Internet armazena uma quantidade enorme de informações. Ao fazer uma busca na rede, os *sites* são listados em ordem decrescente segundo o seu grau de importância. Considere que, para calcular o grau de importância, são analisados três fatores: a quantidade de pessoas que se inscrevem no *site*, a quantidade de atualizações do *site* e a quantidade de visualizações do *site*. Cada um desses fatores recebe uma pontuação determinada.

- **Para que o *site* obtenha 9000 pontos e seja considerado de grande importância, são necessárias 600 pessoas inscritas, 600 atualizações e 800 visualizações.**
- **Para que o *site* obtenha 6300 pontos e seja considerado de média importância, são necessárias 300 pessoas inscritas, 600 atualizações e 300 visualizações.**
- **Para que o *site* obtenha 2000 pontos e seja considerado de importância satisfatória, são necessárias 100 pessoas inscritas, 100 atualizações e 300 visualizações.**

A partir dessas informações, determine a pontuação obtida por um *site* que apresenta 900 pessoas inscritas, 450 atualizações e 700 visualizações.
Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução desta questão.

QUESTÃO 2 – EXPECTATIVA DE RESPOSTA

Conteúdo programático: Resolução de um sistema linear.

Resposta esperada:

Este é um problema que aborda sistema linear com três equações e três incógnitas.

$$\begin{cases} 600a + 600b + 800c = 9000 \\ 300a + 600b + 300c = 6300 \\ 100a + 100b + 300c = 2000 \end{cases}$$

em que
a é a pontuação por pessoa inscrita no *site*.
b é a pontuação por atualizações do *site*.
c é a pontuação por visualizações do *site*.

Simplificando o sistema, obtém-se:

$$\begin{cases} 6a + 6b + 8c = 90 & \text{1ª equação} \\ 3a + 6b + 3c = 63 & \text{2ª equação} \\ a + b + 3c = 20 & \text{3ª equação} \end{cases}$$

Multiplicando a 3ª equação por (-6) obtém-se $-6a - 6b - 18c = -120$.
Somando esta equação obtida com a 1ª equação, obtém-se $-10c = -30$, ou seja, $c = 3$.
Multiplicando a 3ª equação por (-3) obtém-se $-3a - 3b - 9c = -60$.
Somando esta equação obtida com a 2ª equação, obtém-se $3b - 6c = 3$.
Substituindo $c = 3$ nesta última equação, obtém-se $b = 7$.
Substituindo $b = 7$ e $c = 3$ na 3ª equação, obtém-se $a = 4$.
Portanto, como o *site* apresenta 900 pessoas inscritas $(900 \times 4 = 3600)$, 450 atualizações $(450 \times 7 = 3150)$ e 700 visualizações $(700 \times 3 = 2100)$, sua pontuação global é de 8850 pontos.

3

Leia o texto a seguir.

O movimento Free Hugs começou em 2001 com um único indivíduo, em Sidney, Austrália, conhecido pelo pseudônimo de Juan Mann. Ao se ver em situação desconfortável, com vários problemas pessoais e familiares, Mann decidiu sair sozinho, caminhando pelas ruas e oferecendo abraços às pessoas em lugares públicos como um gesto hipoteticamente neutro e sem interesses. Ele usava um cartaz de papelão nas mãos com a mensagem "Free Hugs" para oferecer abraços a desconhecidos. Nos dias de hoje, várias vezes ao ano e em diferentes cidades no mundo, agentes voluntários saem, sozinhos ou em grupos organizados, pelas ruas, repetindo a ação inicial de Mann para propor a troca de abraços com desconhecidos.

(Adaptado de: MARTINS, F. G. P.; GUSHIKEN, Y. *Free Hugs*: dinâmicas de troca, dádiva e estranhamento na intervenção urbana. *Comunicação, mídia e consumo*. ano 9. v.9. n.24. maio 2012. p.179-198.)

Em um determinado dia, uma apresentadora de um programa de TV, após exibir reportagem sobre o movimento "Free Hugs", propôs aos espectadores da plateia que saudassem a todos os demais (uns aos outros) com um abraço. Considere que:

- **todos aceitaram o abraço;**
- **os abraços ocorreram apenas entre pessoas da plateia;**
- **cada abraço envolveu apenas duas pessoas;**
- **duas pessoas se abraçaram apenas uma vez;**
- **quando terminaram as saudações, o total de abraços foi de 496.**

Quantas pessoas formavam a plateia do programa naquele dia?
Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução desta questão.

QUESTÃO 3 – EXPECTATIVA DE RESPOSTA

Conteúdo programático: Análise Combinatória: Combinações simples.

Resposta esperada:

Considere que havia n pessoas na plateia do programa naquele dia. Em relação a um abraço realizado entre 2 pessoas, a pessoa X abraçar a pessoa Y consiste no mesmo abraço que quando a pessoa Y abraça a pessoa X, assim a alteração da ordem das pessoas não é relevante para gerar um abraço a ser considerado como distinto nesse contexto. Logo, os abraços realizados entre as pessoas da plateia serão distintos apenas pela natureza dos elementos que os constituem, ou seja, pelas pessoas que estão se abraçando, e não pela ordem. Assim, cada abraço entre 2 pessoas corresponde a uma combinação simples de 2 pessoas de um total de n. Portanto, o total de abraços distintos é dado pela quantidade de combinações simples de n elementos tomados 2 a 2. Isto é,

$$C_{n,2} = 496$$
$$\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = 496$$
$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)! \cdot 2!} = 496$$
$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} = 496$$
$$n^2 - n = 992$$
$$n^2 - n - 992 = 0$$

Determinando as raízes da equação obtida, tem-se que $n = 32$ ou $n = -31$. Como n se refere à quantidade de pessoas, $n = -31$ não faz sentido neste contexto.
Portanto, a quantidade de pessoas que formava a plateia naquele dia era de 32.

Resolução alternativa:

Pode-se considerar que há uma quantidade n de pessoas, que seja feita uma fila e a primeira pessoa dê $(n-1)$ abraços, a segunda pessoa dê $(n-2)$ abraços, a terceira pessoa dê $(n-3)$ abraços, e assim sucessivamente até que a penúltima pessoa dê o último abraço. Pensando dessa forma, a quantidade de abraços dados $(n-1, n-2, n-3, ..., 1, 0)$

constitui uma Progressão Aritmética de razão (-1). Assim, como $a_1 = n - 1$, $a_n = 0$ e $S_n = 496$, então pela fórmula da soma dos n termos de uma progressão aritmética, tem-se

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$$

$$496 = \frac{[(n-1) + 0] \times n}{2}$$

$$n^2 - n = 992$$

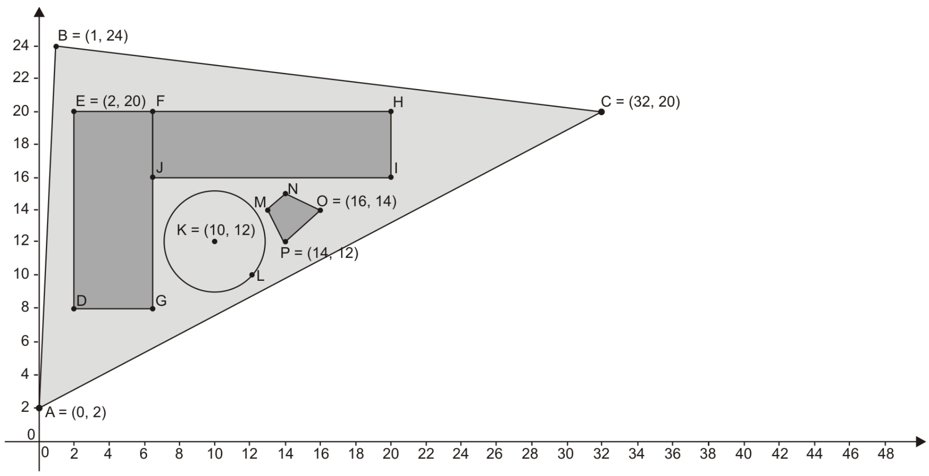
$$n^2 - n - 992 = 0$$

Determinando as raízes da equação obtida, tem-se que $n = 32$ ou $n = -31$. Como n se refere à quantidade de pessoas, $n = -31$ não faz sentido neste contexto.

Portanto, a quantidade de pessoas que formava a plateia naquele dia era de 32.

4

Alice comprou um terreno de forma triangular e solicitou a um engenheiro civil que fizesse a planta da casa a ser construída, incluindo um gazebo e uma piscina na área de lazer. A proposta do engenheiro foi construir a casa em formato de L, um gazebo de forma trapezoidal e uma piscina com formato circular.
Considere a seguir, no plano cartesiano, a planta feita pelo engenheiro, na qual constam o esboço do terreno, da localização da casa, do gazebo e da piscina.



Considerando que as medidas apresentadas no esboço são dadas em metros, responda aos itens a seguir.

a) Determine a área representada pela região triangular ABC, em m^2, ocupada pelo terreno.
Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

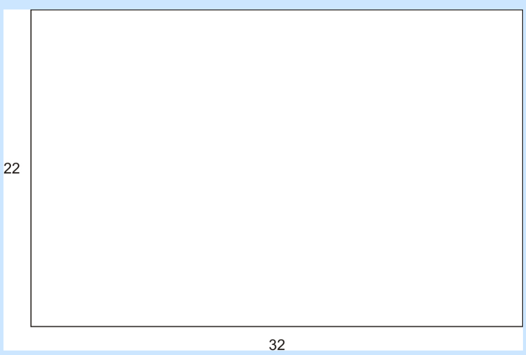
b) Considerando que o ponto L pertence à circunferência do círculo de centro K e que é o ponto de interseção das retas t e s, em que t é a reta determinada pelos pontos P e O e s é a reta determinada pelos pontos E e K, determine a equação reduzida da circunferência de centro K, que representa a piscina no plano cartesiano.
Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

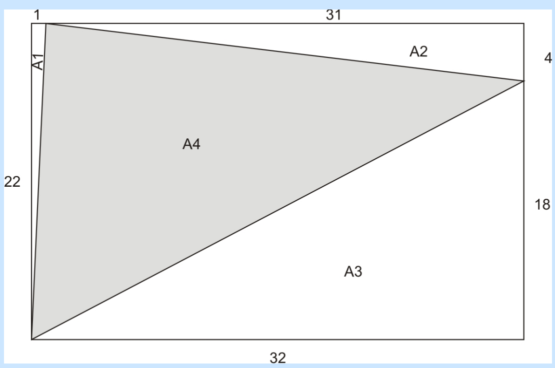
QUESTÃO 4 – EXPECTATIVA DE RESPOSTA

Conteúdo programático: Áreas de polígonos e de círculos. Geometria Analítica: distância entre dois pontos; equação da reta; coeficiente angular; interseção de retas; equação da circunferência.

Resposta esperada:

a) Considere A_t a área da região dada pela figura retangular e A_1, A_2, A_3 e A_4 as áreas das figuras triangulares inseridas em A_t





Deseja-se obter A_4, observando que $A_4 = A_t - A_1 - A_2 - A_3$. Como $A_1 = \dfrac{22 \times 1}{2} = 11$; $A_2 = \dfrac{31 \times 4}{2} = 62$; $A_3 = \dfrac{32 \times 18}{2} = 288$ e $A_t = 22 \times 32 = 704$. Logo, $A_4 = 704 - 11 - 62 - 288 = 343$ m^2.

Resolução alternativa:

Considerando que os vértices do triângulo ABC no plano cartesiano correspondem aos pontos A = $(0, 2)$, B = $(1, 24)$ e C = $(32, 20)$, então a área S do triângulo ABC é dada por $S = \frac{1}{2}|D|$, em que

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 24 & 1 \\ 32 & 20 & 1 \end{vmatrix}.$$

Como $D = -686$, segue que $S = \frac{1}{2}|-686| = 343$.

Portanto, a área ocupada pelo terreno é de 343 m^2.

b) A equação reduzida de uma circunferência de centro em (a, b) e raio r é dada pela equação $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$.

Sabendo que a circunferência tem centro em K = $(10, 12)$, é necessário determinar a medida do raio r. Para calcular r, é necessário calcular a distância entre os pontos K e L, observando que r = $\overline{\text{KL}}$. Para isso, é necessário determinar as coordenadas do ponto L, que é o ponto de interseção das retas t e s.

A reta t passa pelos pontos P = $(14, 12)$ e O = $(16, 14)$. Assim, sabendo que $m_t = \frac{14-12}{16-14} = 1$ é o coeficiente angular dessa reta, e considerando a equação da reta dada pela equação $y - y_0 = m(x - x_0)$, em que (x_0, y_0) são as coordenadas do ponto P, então $y - 12 = 1 \cdot (x - 14) \Rightarrow y = x - 14 + 12 \Rightarrow y = x - 2$.
Portanto, $y = x - 2$ é a equação da reta t.

A reta s passa pelos pontos E = $(2, 20)$ e K = $(10, 12)$. Assim, sabendo que $m_s = \frac{12-20}{10-2} = -1$ é o coeficiente angular dessa reta, e considerando a equação da reta dada pela equação $y - y_0 = m(x - x_0)$, em que (x_0, y_0) são as coordenadas do ponto K, então $y - 12 = -1 \cdot (x - 10) \Rightarrow y = -x + 10 + 12 \Rightarrow y = -x + 22$
Portanto, $y = -x + 22$ é a equação da reta s.

Como L é o ponto de interseção das retas t e s, basta igualar essas duas equações, fazendo $x - 2 = -x + 22$ para determinar suas coordenadas, ou seja, $x = 12$ e $y = 10$.

Portanto, as coordenadas de L são $(12, 10)$.
Assim, o raio r = $\overline{\text{KL}} = \sqrt{(12-10)^2 + (10-12)^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$.

Substituindo os valores $(a, b) = (10, 12)$ e $r = \sqrt{8}$ na equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, obtém-se a equação $(x - 10)^2 + (y - 12)^2 = 8$, que é a equação reduzida da circunferência de centro K que representa a piscina no plano cartesiano.